Corso di Metodi Matematici per la Finanza

Soluzioni degli esercizi su EDO/ED lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Es. 1

a) $\boxed{x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = 0, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0}$
Equazione caratteristica: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.
Soluzione generale: $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Calcoliamo la derivata: $x(t) = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t} + 2c_2 e^{2t}$ e imponiamo le condizioni iniziali, ottenendo un sistema lineare di 2 equazioni nelle 2 incognite c_1 e c_2:

$$\begin{aligned} 1 &= x(0) = c_1 + c_2 \\ 0 &= x'(0) = 2c_1 + c_2. \end{aligned}$$

Si ha: $c_1 = 1$, $c_2 = -2$. Pertanto la soluzione particolare relativa ai dati iniziali assegnati è: $x(t) = e^{2t} - 2te^{2t}$.

b) $\boxed{x''(t) + 4x'(t) + 5x(t) = 0, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0}$
Equazione caratteristica: $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$; $\lambda_1 = -2 - i\lambda_2 = -2 + i$.
Soluzione generale: $x(t) = e^{-2t}\left(c_1 \cos t + c_2 \sin t\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Calcoliamo la derivata: $x(t) = -2e^{-2t}\left(c_1 \cos t + c_2 \sin t\right) + e^{-2t}\left(-c_1 \sin t + c_2 \cos t\right)$ e imponiamo le condizioni iniziali, ottenendo un sistema lineare di 2 equazioni nelle 2 incognite c_1 e c_2:

$$\begin{aligned} 1 &= x(0) = c_1 \\ 0 &= x'(0) = -2c_1 + c_2. \end{aligned}$$

Si ha: $c_1 = 1$, $c_2 = 2$. Pertanto la soluzione particolare relativa ai dati iniziali assegnati è: $x(t) = e^{-2t}\left(\cos t + 2 \sin t\right)$.

Es. 2

a) $\boxed{2x(t+2) - 3x(t+1) + x(t) = 0, \quad x(0) = 1,\ x(1) = 2}$
Equazione caratteristica: $2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$; $\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = 1$.
Soluzione generale: $x(t) = c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^t + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Imponiamo le condizioni iniziali, ottenendo un sistema lineare di 2 equazioni nelle 2 incognite c_1 e c_2:

$$\begin{aligned} 1 &= x(0) = c_1 + c_2 \\ 2 &= x(1) = \frac{c_1}{2} + c_2. \end{aligned}$$

Si ha: $c_1 = -2$, $c_2 = 3$. Pertanto la soluzione particolare relativa ai dati iniziali assegnati è: $x(t) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^t + 3$.

b) $\boxed{x(t+2) - 4x(t+1) + 4x(t) = 0, \quad x(0) = x(1) = 1}$

Equazione caratteristica: $2\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.
Soluzione generale: $x(t) = c_1 2^t + c_2 t 2^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Imponiamo le condizioni iniziali, ottenendo un sistema lineare di 2 equazioni nelle 2 incognite c_1 e c_2:

$$\begin{aligned} 1 &= x(0) = c_1 \\ 1 &= x(1) = 2c_1 + 2c_2. \end{aligned}$$

Si ha: $c_1 = 1$, $c_2 = -\frac{1}{2}$. Pertanto la soluzione particolare relativa ai dati iniziali assegnati è: $x(t) = 2^t - \frac{1}{2} t 2^t$.

c) $\boxed{2x(t+2) + 2x(t+1) + x(t) = 0, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 1}$

Equazione caratteristica: $2\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$; $\lambda_1 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$.
Si ha:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \theta = \arctan\left(-\frac{b}{a}\right) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi,$$

pertanto la soluzione generale è

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \rho^t \cos(\theta t) + c_2 \rho^t \sin(\theta t) \\ &= c_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t \cos\left(\frac{3}{4}\pi t\right) + c_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t \sin\left(\frac{3}{4}\pi t\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Imponiamo le condizioni iniziali, ottenendo un sistema lineare di 2 equazioni nelle 2 incognite c_1 e c_2:

$$\begin{aligned} 0 &= x(0) = c_1 \\ 1 &= x(1) = c_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + c_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right). \end{aligned}$$

Si ha: $c_1 = 0$, $c_2 = 2$. Pertanto la soluzione particolare relativa ai dati iniziali assegnati è: $x(t) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t \sin\left(\frac{3}{4}\pi t\right)$.

Es. 3

a) $\boxed{x''(t) + 5x'(t) + 4x(t) = 3 - 2t}$

Equazione omogenea associata: $z''(t) + 5z'(t) + z(t) = 0$; equazione caratteristica: $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$; $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -1$; soluzione generale equazione omogenea associata: $z(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Quindi la soluzione generale sarà della forma:

$$x(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-t} + \bar{x}(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

dove $\bar{x}(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Dato che il termine noto dell'equazione è $f(t) = 3 - 2t = P_1(t)$, i.e. un polinomio di grado 1 e il termine in $x(t)$ dell'equazione è non degenere (il coefficiente è diverso da 0), allora cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\bar{x}(t) = at + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

i.e. un polinomio di grado 1. Poiché $\bar{x}(t)$ è una soluzione particolare deve soddisfare l'equazione non omogenea. Allora, dopo aver calcolato le derivate (prima e seconda) di $\bar{x}(t)$ andiamo a sostituire nell'equazione e riordinando i termini otteniamo:

$$4at + (5a + 4b) = -3t + 3.$$

Utilizzando il principio di identità dei polinomi, si ha:

$$\begin{aligned} 4a &= -2 \\ 5a + 4b &= 3. \end{aligned}$$

Otteniamo $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{11}{8}$. Quindi $\bar{x}(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{11}{8}$ e la soluzione generale è:

$$x(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2}t + \frac{11}{8}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) $\boxed{x''(t) - x(t) = te^t}$

Equazione omogenea associata: $z''(t) - z(t) = 0$; equazione caratteristica: $\lambda^2 - 1 = 0$; $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$; soluzione generale equazione omogenea associata: $z(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Quindi la soluzione generale sarà della forma:

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t + \bar{x}(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

dove $\bar{x}(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Il termine noto è della forma

$$f(t) = te^t = P_1(t)e^{\alpha t},$$

dove $P_1(t)$ denota un polinomio di primo grado e $\alpha = 1$. Poiché $\alpha = 1$ è radice di molteplicità 1 dell'equazione caratteristica, allora cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\bar{x}(t) = t^1(at + b)e^t = t(at + b)e^t, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Poiché $\bar{x}(t)$ è una soluzione particolare deve soddisfare l'equazione non omogenea. Allora, calcoliamo le derivate (prima e seconda) di $\bar{x}(t)$:

$$\begin{aligned} \bar{x}'(t) &= (at + b)e^t + ate^t + t(at + b)e^t \\ \bar{x}''(t) &= ae^t + (at + b)e^t + ae^t + ate^t + (at + b)e^t + ate^t + t(at + b)e^t, \end{aligned}$$

andiamo a sostituire nell'equazione e semplificando e^t e riordinando i termini otteniamo:

$$4at + 2a + 2b = t.$$

Utilizzando il principio di identità dei polinomi, si ha:

$$\begin{aligned} 4a &= 1 \\ 2a + 2b &= 0. \end{aligned}$$

Otteniamo $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{4}$. Quindi $\bar{x}(t) = t\left(\frac{1}{4}t - \frac{1}{4}\right)e^t$ e la soluzione generale è:

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t + t\left(\frac{1}{4}t - \frac{1}{4}\right)e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

c) $\boxed{x''(t) - x(t) = 3e^{2t}\cos t}$

Equazione omogenea associata: $z''(t) - z(t) = 0$; equazione caratteristica: $\lambda^2 - 1 = 0$; $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$; soluzione generale equazione omogenea associata: $z(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Quindi la soluzione generale sarà della forma:

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t + \bar{x}(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

dove $\bar{x}(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Il termine noto è della forma

$$f(t) = 3e^{2t}\cos t = P_0(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t),$$

dove $P_0(t)$ denota un polinomio di grado 0, ovvero una costante e $\alpha = 2$ e $\beta = 1$. Poiché $\alpha + i\beta = 2 + i$ non è radice dell'equazione caratteristica, allora cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= e^{\alpha t}\left(k\cos(\beta t) + h\sin(\beta t)\right)\\ &= e^{2t}\left(k\cos t + h\sin t\right), \quad k, h \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Poiché $\bar{x}(t)$ è una soluzione particolare deve soddisfare l'equazione non omogenea. Allora, calcoliamo le derivate (prima e seconda) di $\bar{x}(t)$:

$$\begin{aligned}\bar{x}'(t) &= 2e^{2t}\left(k\cos t + h\sin t\right) + e^{2t}\left(-k\sin t + h\cos t\right)\\ \bar{x}''(t) &= 4e^{t}\left(k\cos t + h\sin t\right) + 4e^{2t}\left(-k\sin t + h\cos t\right) + e^{2t}\left(-k\cos t - h\sin t\right),\end{aligned}$$

andiamo a sostituire nell'equazione e semplificando e^{2t} e riordinando i termini otteniamo:

$$(2k + 4h)\cos t + (2k - 4h)\sin t = 3\cos t,$$

da cui

$$\begin{aligned}2k + 4h &= 3\\ 2k - 4h &= 0\end{aligned}$$

e in definitiva: $k = \frac{3}{10}$ e $h = \frac{3}{5}$. Soluzione particolare: $\bar{x}(t) = e^{2t}\left(\frac{3}{10}\cos t + \frac{3}{5}\sin t\right)$ Soluzione generale:

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t + e^{2t}\left(\frac{3}{10}\cos t + \frac{3}{5}\sin t\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Es. 4

a) $\boxed{x(t+2) - 3x(t+1) + 2x(t) = 3^t}$

Equazione omogenea associata: $z''(t) - 3z'(t) + 2z(t) = 0$; equazione caratteristica: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$; $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$; soluzione generale equazione omogenea associata: $z(t) = c_1 1^t + c_2 2^t = c_1 + c_2 2^t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Quindi la soluzione generale sarà della forma:

$$x(t) = c_1 + c_2 2^t + \bar{x}(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

dove $\bar{x}(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Il termine noto è della forma

$$f(t) = 3^t = P_0(t)\sigma^t,$$

dove $P_0(t)$ denota un polinomio di grado 0, ovvero una costante e $\sigma = 3$. Poiché $\sigma = 3$ non è radice dell'equazione caratteristica cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\bar{x}(t) = k3^t, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} x(t+1) &= k3^{t+1} \\ x(t+2) &= k3^{t+2} \end{aligned}$$

e sostituiamo nell'equazione alle differenze assegnata (essendo una soluzione particolare la deve soddisfare):

$$k3^{t+2} - 3k3^{t+1} + 2k3^t = 3^t.$$

Semplificando 3^t, otteniamo $k = \frac{1}{2}$. Pertanto $\bar{x}(t) = \frac{1}{2}3^t$ e la soluzione generale è:

$$x(t) = c_1 1^t + c_2 2^t = c_1 + c_2 2^t + \frac{1}{2}3^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) $\boxed{x(t+2) - 4x(t+1) + 4x(t) = 2^t}$

Equazione omogenea associata: $z''(t) - 4z'(t) + 4z(t) = 0$; equazione caratteristica: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$; soluzione generale equazione omogenea associata: $z(t) = c_1 2^t + c_2 t 2^t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Quindi la soluzione generale sarà della forma:

$$x(t) = c_1 2^t + c_2 t 2^t + \bar{x}(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

dove $\bar{x}(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Il termine noto è della forma

$$f(t) = 2^t = P_0(t)\sigma^t,$$

dove $P_0(t)$ denota un polinomio di grado 0, ovvero una costante e $\sigma = 2$. Poiché $\sigma = 3$ è radice di molteplicità 2 dell'equazione caratteristica cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\bar{x}(t) = kt^2 2^t, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} x(t+1) &= k(t+1)^2 2^{t+1} \\ x(t+2) &= k(t+2)^2 2^{t+2} \end{aligned}$$

e sostituiamo nell'equazione alle differenze assegnata:

$$k(t+2)^2 2^{t+2} - 4k(t+1)^2 2^{t+1} + 4kt^2 2^t = 2^t.$$

Semplificando 2^t, otteniamo $k = \frac{1}{8}$. Pertanto $\bar{x}(t) = \frac{1}{8}2^t$ e la soluzione generale è:

$$x(t) = c_1 2^t + c_2 t 2^t + \frac{1}{8}2^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$