

# Capitolo 18

## Integrali impropri

### 18.1 Generalità

Come ulteriore sviluppo dell'integrazione secondo Riemann, vogliamo dare significato all'integrale per una classe più ampia di funzioni

$$\int_I f(x)dx$$

con  $I$  intervallo generico (non chiuso e/o non limitato) e/o  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  (eventualmente non limitata). Tale integrale si dirà *improprio*.

Come punto di partenza riscriviamo la proprietà di continuità rispetto al dominio.

**Proposizione 18.1** *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  integrabile secondo Riemann. Risulta*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x)dx \\ &= \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x)dx.\end{aligned}$$

In quanto segue assumiamo  $a, b \in \bar{\mathbf{R}}$ , con  $a < b$  (e con le opportune restrizioni nel caso di estremi inclusi) e consideriamo funzioni integrabili secondo Riemann sui sottointervalli  $[c, d]$  chiusi e limitati. Possiamo distinguere tre situazioni; nelle prime due la definizione viene suggerita direttamente dalla proprietà di continuità rispetto al dominio.

a) Sia  $f : [a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ ; si pone

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x)dx,$$

sotto la condizione che il limite esista.

b) Analogamente nel caso  $f : (a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ; si pone

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x)dx,$$

sotto la condizione che il limite esista.

c) Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ . Ci si riconduce ai casi precedenti: fissato  $x_0 \in (a, b)$  si pone

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx = \\ &= \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^{x_0} f(x) dx + \lim_{c \rightarrow b^-} \int_{x_0}^c f(x) dx \end{aligned}$$

sotto la condizione che i limiti esistano e non si tratti di infiniti di segno opposto.

**Definizione 18.2** *In tutti i casi suddetti la funzione  $f$  si dice integrabile in senso improprio se i singoli limiti esistono e sono finiti.*

**Esempio 18.3 (prototipo di integrale improprio)** *Sia  $\alpha > 0$ . La funzione  $f(x) = 1/x^\alpha$  è definita per  $x > 0$  e diverge per  $x \rightarrow 0^+$ . Risulta*

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} &= \begin{cases} 1/(1-\alpha) & \text{se } \alpha < 1, \\ +\infty & \text{se } 1 \leq \alpha; \end{cases} \\ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} &= \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \leq 1, \\ 1/(\alpha-1) & \text{se } 1 < \alpha. \end{cases} \end{aligned}$$

Osserviamo che per nessun valore di  $\alpha$  la funzione è integrabile su tutto  $(0, +\infty)$ .

La nozione di integrale improprio ammette ulteriori generalizzazioni.

d) Sia  $f : [a, b] \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbf{R}$ . Ci si riconduce ai casi precedenti a) e b):

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx = \\ &= \lim_{c \rightarrow x_0^-} \int_a^c f(x) dx + \lim_{c \rightarrow x_0^+} \int_c^b f(x) dx, \end{aligned}$$

sotto la condizione che i limiti esistano e non si tratti di infiniti di segno opposto.

e) L'integrale improprio di una funzione definita su un intervallo privato di un numero finito di punti si pone uguale alla somma di integrali (impropri) su intervalli semiaperti (o chiusi e illimitati).

**Esempio 18.4** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \frac{\log x}{\sqrt[3]{x^4 - 16}}$$

la quale risulta definita su

$$(0, +\infty) \setminus \{2\} = (0, 2) \cup (2, +\infty).$$

Si pone

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx + \int_4^{+\infty} f(x) dx.$$

Ovviamente la scelta dei punti  $1 \in (0, 2)$  e  $4 \in (2, +\infty)$  è completamente arbitraria.

**Osservazione 18.5** Nella definizione e nel calcolo degli integrali impropri non è consentito rimpiazzare due limiti separati con uno simultaneo.

Ad esempio, se vogliamo calcolare  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ , il risultato di

$$\lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^{x_0} f(x) dx + \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^c f(x) dx$$

(corretto), potrebbe essere ben diverso da

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^c f(x) dx$$

(errato).

## 18.2 Criteri di integrabilità in senso improprio

In molte situazioni, teoriche e/o pratiche, è sufficiente stabilire che una certa funzione sia integrabile in senso improprio, anche se non si riesce a calcolare l'integrale. A questo scopo si sviluppa una teoria per molti aspetti analoga a quella delle serie.

Per tutto il resto del paragrafo, in assenza di altre precisazioni, consideriamo funzioni integrabili secondo Riemann su sottointervalli chiusi e limitati contenuti nel dominio. Quando si dirà integrabile si intenderà dunque “in senso improprio”.

### 18.2.1 Integrabilità di funzioni positive

Ci riferiamo ad un intervallo prototipo  $[a, b)$  (ove  $b$  può essere anche  $+\infty$ ). Ovviamente si hanno risultati analoghi in  $(a, b]$ .

**Proposizione 18.6** Se  $f : [a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  è positiva (in un intorno sinistro di  $b$ ), allora esiste

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx.$$

**Dimostrazione.** Conseguenza della regolarità delle funzioni monotone. ■

Rimane da stabilire se il limite è finito. Enunciamo due criteri base.

**Criterio 18.7 (di confronto)** Siano  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  tali che (in un intorno sinistro di  $b$ )

$$0 \leq f(x) \leq g(x).$$

Se  $g$  è integrabile, allora anche  $f$  è integrabile; se  $f$  non è integrabile, anche  $g$  non è integrabile.

**Criterio 18.8 (di confronto asintotico)** Siano  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  continue e positive (in un intorno sinistro di  $b$ ). Se risulta

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \ell \in (0, +\infty)$$

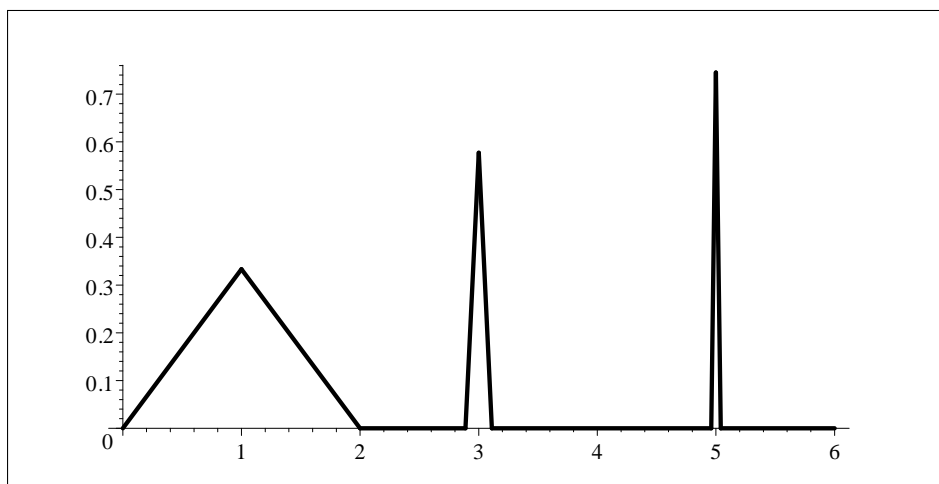
(in particolare se  $f$  e  $g$  sono asintoticamente equivalenti), allora  $f$  è integrabile se e solo se  $g$  è integrabile.

**Integrabilità su intervalli  $[a, +\infty)$** 

Sia  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  positiva.

Se  $f$  è integrabile il rettangoloide non può contenere alcun “rettangolo” con area infinita, quindi, per  $x \rightarrow +\infty$ , potremmo pensare che la funzione tenda a 0. In realtà tale condizione non è né sufficiente né necessaria per l'integrabilità.

**Esempio 18.9** *La funzione  $f(x) = 1/x$  è infinitesima ma non integrabile. Esistono funzioni integrabili ma non infinitesime e neanche limitate (vedi figura seguente).*



Per i criteri di confronto esistono prototipi di funzioni integrabili, infinitesime all'infinito:  $1/a^x$  con  $a > 1$ ;  $1/x^\alpha$  con  $\alpha > 0$ .

Dallo studio di  $1/x^\alpha$  e dal Criterio di confronto, si deduce il seguente criterio, del tutto analogo a quello omonimo per le serie.

**Criterio 18.10 (degli infinitesimi) ??Se**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) > 0$$

allora l'integrale diverge.

Se esiste un certo  $\alpha > 1$  tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) < +\infty$$

allora l'integrale converge.

**Integrabilità su intervalli  $(0, a]$** 

Sia  $f : (0, a] \rightarrow \mathbf{R}$  positiva. I problemi di integrabilità si pongono se la funzione  $f$  non è limitata in un intorno destro di 0, in particolare se  $f$  diverge.

Per i criteri di confronto utilizziamo la funzione  $1/x^\alpha$  con  $\alpha > 0$ .

Abbiamo anche un “criterio degli infiniti”, analogo a quello degli infinitesimi.

**Criterio 18.11** Se

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x f(x) > 0$$

allora l'integrale diverge.

Se esiste un certo  $\alpha < 1$  tale che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha f(x) < +\infty$$

allora l'integrale converge.

**Esempio 18.12** Studiare la convergenza di

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log^2 x}{\sqrt{3^x}} dx \quad (18.1)$$

La funzione integranda

$$f(x) = \frac{\log^2 x}{\sqrt{3^x}}$$

è definita, continua e positiva in  $(0, +\infty)$ . Pertanto possiamo (e dobbiamo) scrivere l'integrale come somma di due integrali su intervalli semiaperti (o chiusi e illimitati)

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^4 f(x) dx + \int_4^{+\infty} f(x) dx$$

La convergenza del primo integrale

$$\int_0^4 f(x) dx \quad (18.2)$$

dipende dal comportamento di  $f$  per  $x \rightarrow 0^+$ . Applichiamo il Criterio 18.11: poiché risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/2} \frac{\log^2 x}{\sqrt{3^x}} = 0$$

concludiamo che (18.2) converge.

Analogamente la convergenza del secondo integrale

$$\int_4^{+\infty} \frac{\log^2 x}{\sqrt{3^x}} dx \quad (18.3)$$

dipende dal comportamento di  $f$  per  $x \rightarrow +\infty$ . Applichiamo il Criterio ???: poiché risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \frac{\log^2 x}{\sqrt{3^x}} = 0$$

concludiamo che (18.3) converge.

Dunque l'integrale (18.1) converge, ossia la funzione  $f$  è integrabile su  $(0, +\infty)$ .

### 18.2.2 Assoluta integrabilità

Come sopra ci riferiamo ad un intervallo prototipo  $[a, b)$  (ove  $b$  può essere anche  $+\infty$ ); ovviamente si hanno risultati analoghi in  $(a, b]$ .

Se la funzione integranda non ha segno costante (in un intorno del punto  $b$ ), non è affatto assicurata l'esistenza del limite; si consideri, ad esempio,

$$\int_0^{+\infty} \sin x \, dx$$

Il principale criterio di convergenza, come per le serie, è quello della assoluta integrabilità.

**Teorema 18.13** *Assegnata  $f : [a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ , se l'integrale (improprio)*

$$\int_a^b |f(x)| \, dx$$

*converge, allora converge anche*

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

*e si ha*

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$$

Come per le serie, per studiare l'integrabilità di

$$\int_a^b |f(x)| \, dx$$

si possono utilizzare tutte le tecniche introdotte per gli integrali impropri a segno costante (confronto, confronto asintotico,...).

**Esempio 18.14** *Studiamo l'integrale improprio*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} \, dx$$

*La funzione integranda non ha segno costante quindi ricorriamo all'assoluta integrabilità.*

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| = \frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

*Dunque, per confronto,*

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \, dx$$

*è convergente, quindi l'integrale assegnato è assolutamente convergente.*

**Esempio 18.15** *Studiamo l'integrale improprio*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$$

In 0 vi è un problema solo apparente, in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Quindi si decompone l'integrale come segue

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

dove da 0 a 1 abbiamo l'integrale di una funzione continua (integrale di Riemann) e da 1 a  $+\infty$  abbiamo, evidentemente, un integrale improprio sul quale concentriamo la nostra attenzione. La funzione integranda non ha segno costante quindi ricorriamo come sopra all'assoluta integrabilità e al confronto:

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| = \frac{|\sin x|}{x} \leq \frac{1}{x};$$

tuttavia non possiamo concludere nulla, in quanto abbiamo maggiorato con una funzione che non è integrabile in senso improprio. Possiamo aggirare il problema con una integrazione per parti.

$$\begin{aligned} \int_1^c \frac{\sin x}{x} dx &= \int_1^c \frac{1}{x} D(-\cos x) dx = \\ &= \left[ \frac{-\cos x}{x} \right]_{x=1}^{x=c} - \int_1^c \frac{\cos x}{x^2} dx. \end{aligned}$$

Quindi, quando passiamo al limite per  $c \rightarrow +\infty$ , ci siamo ricondotti all'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

che è convergente. Quindi si conclude che anche

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

è convergente.

**Osservazione 18.16** Si può dimostrare che

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

non è convergente, quindi, analogamente a quanto accade per le serie, esistono funzioni integrabili ma non assolutamente integrabili.

## 18.3 Criterio dell'integrale per le serie

Abbiamo osservato che tra la teoria degli integrali impropri e la teoria delle serie c'è una notevole analogia. Ora enunciamo un ulteriore criterio per la convergenza delle serie a termini positivi. Questo criterio mostra che le due serie non sono solo parallele ma anche "intrecciate".

**Teorema 18.17** *Sia assegnata una serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

*a termini positivi. Supponiamo che esista una funzione  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  continua, decrescente e tale che  $f(n) = a_n$ . Allora la serie converge se e solo se converge l'integrale*

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx.$$

*Inoltre, in caso di convergenza, denotate con  $S$  ed  $s_n$  rispettivamente la somma della serie e la somma parziale  $n$ -sima, risulta*

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx \leq S - s_n \leq \int_n^{+\infty} f(x) dx. \quad (18.4)$$

**Osservazione 18.18** *La somma della serie non coincide con l'integrale.*

Da questo criterio, in particolare, si deduce il carattere delle serie armoniche generalizzate e la stima (??). Il criterio dell'integrale, inoltre, serve a studiare serie che sfuggono anche al criterio degli infinitesimi.

**Esempio 18.19** *Si consideri la serie numerica*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log^p n}.$$

In ogni caso la disuguaglianza (18.4) consente di calcolare somme approssimate, quindi questo criterio può tornare utile anche in situazioni in cui la convergenza della serie è nota.

**Esempio 18.20** *La serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{e^n}$$

*è convergente (si usi, ad esempio, il criterio del rapporto).*

*La funzione  $x^2/e^x$ , associata alla successione  $n^2/e^n$ , è continua su  $\mathbf{R}$  e monotona decrescente in  $[2, +\infty)$ . Quindi, con il criterio dell'integrale, proviamo a calcolare una somma approssimata con un errore inferiore a  $1/1000$ . Abbiamo*

$$S - s_n < \int_n^{+\infty} \frac{x^2}{e^x} dx = \frac{(n+1)^2 + 1}{e^n}.$$

*Per risolvere*

$$\frac{(n+1)^2 + 1}{e^n} < \frac{1}{1000}$$

*possiamo solo procedere per tentativi. La disuguaglianza è verificata per  $n = 13$ . In conclusione una somma approssimata entro il margine di errore prefissato è data da  $s_{13}$ .*