Matematica Discreta- Informatica- N.O. corso B- appello del 30 /01/07

1. Vericare che $\forall n \geq 0$, risulta: $6 \mid 2n^3 + 10n$.

2.a) Verificare che $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ si ha: $8 \mid 6a + 2b \Leftrightarrow a \equiv b(\mathrm{mod}\,4)$
 b) Utilizzando il teorema di Eulero-Fermat, dire se $35^{58} \equiv 1(\mathrm{mod}\,24)$.

3. Scrivere la partizione su $X = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 10\}$, determinata dalla relazione di equivalenza associata all'applicazione $f : X \to \{0, 1, 2, 3, 4\}$ cosi'definita:
 $\forall x \in X \;\; f(x) = r$ t.c. $x \equiv r(\mathrm{mod}\,5)$.

4. a)Dire se il polinomio $p(x) = 3x^4 + 2x^3 + 5x + 1$ e' riducibile o no sul campo $\mathbb{Q}$ dei razionali.
 b) Fattorizzare in $\mathbb{Z}_5[x]$ il polinomio $p(x) = \overline{2}x^5 - x^4 + \overline{3}x^3 - \overline{3}x + \overline{4}$.

5. Dato il gruppo $(\mathbb{Z}_{11}^*, \bullet)$,
 a) verificare che $[2]_{11}$ e' un suo generatore e disegnare il diagramma di Hasse del reticolo dei sottogruppi di $(\mathbb{Z}_{11}^*, \bullet)$, senza pero'determinarli.
 b) verificare che $H = \{[1]_{11}, [3]_{11}, [4]_{11}, [5]_{11}, , [9]_{11}\}$ e' un sottogruppo di $(\mathbb{Z}_{11}^*, \bullet)$ e giustificare se $(H, \bullet)$ puo' essere o no isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_5, +)$.
 c) Dato il morfismo di gruppi $f : \mathbb{Z}_{10} \to H$ tale che $f([1]_{10}) = [3]_{11}$, determinare il sottogruppo $f(\langle [2]_{10} \rangle)$.

6. Dati gli insiemi $A = \{1, 3, 4, 6, 8, 24\}$ e $B = \{1, 2, 4, 8, 12, 24\}$, studiare i reticoli $(A, \mid)$ e $(B, \mid)$. (dire cioe' se sono limitati, distributivi,complementati). Inoltre giustificare se sono o no sottoreticoli del reticolo $(D_{24}, \mid)$.